

Kellerautomaten

Eine formale Sprache kann auf verschiedene Arten beschrieben werden. Begonnen haben wir mit umgangssprachlichen Beschreibungen oder durch Aufzählung aller Wörter einer Sprache. Diese eher intuitiven Festlegungen stoßen jedoch schnell an ihre Grenzen. Daher haben Sie endliche Automaten als Erkennendensysteme (Akzeptoren) sowie Grammatiken als Erzeugendensysteme zur Beschreibung einer Sprache kennengelernt.

Mittels Grammatiken können Sie sowohl reguläre als auch kontextfreie oder sogar kontextsensitive Sprachen erzeugen. Mit dem bisher bekannten Erkennendensystem des deterministischen endlichen Automaten (DEA) können jedoch nur reguläre Sprachen erkannt werden. Ziel der folgenden Überlegungen ist daher eine Erweiterung des Automatenmodells auf eine größere Sprachklasse.

Wiederholende Aufgabe

Wir haben gesehen, dass Sprachen, die aus Zeichenpaaren bestehen, die beliebig oft ineinander verschachtelt werden können, nicht regulär sind.

- 1) Begründen Sie mit eigenen Worten, warum es keinen DEA für die Sprache $\{a^n b c^n \mid n=1, 2, 3, \dots\}$ geben kann.

Idee des Kellerautomaten

Die Idee eines Kellerautomaten ist es, das Konzept des deterministischen endlichen Automaten um eine Art „unendlich großen Gedächtnisspeicher“ zu erweitern. Dafür verwendet man einen sogenannten Kellerspeicher – daher auch der Name Kellerautomat.

Ein Kellerspeicher oder Keller entspricht dem Ihnen bekannten Stapel mit den Operationen `Stack()`, `isEmpty()`, `top()`, `push()` und `pop()`.

Für diesen Kellerspeicher wird ein eigenes Kelleralphabet Γ sowie ein Keller-Vorbelegungszeichen, in unserem Fall das Zeichen #, festgelegt. Im Startzustand befindet sich lediglich das Keller-Startsymbol # im Keller. Die Übergänge des Kellerautomaten hängen jetzt nicht mehr nur vom aktuellen Zustand und aktuellen Eingabezeichen ab, sondern auch vom obersten Zeichen des Kellerspeichers. Außerdem legen die drei Werte, also der aktuelle Zustand, das aktuelle Eingabezeichen sowie das oberste Zeichen des Kellerspeichers, fest, welche Werte im Kellerspeicher abgelegt werden. Nur wenn sich der Kellerautomat nach vollständiger Verarbeitung der Eingabe in einem Endzustand befindet, wird die Eingabe vom Automaten akzeptiert.

Aufgabe: Diskutieren Sie mit Mitschüler*innen, welche Vorteile die Hinzunahme eines Kellerspeichers bei der Modellierung einer Sprache haben könnte. Was denken Sie: Reicht diese Hinzunahme zur Modellierung der Sprache $\{a^n b c^n \mid n=1, 2, 3, \dots\}$ aus?

Kellerautomat für das Beispiel der nicht regulären Sprache $\{a^n b^n \mid n=1,2,3,\dots\}$

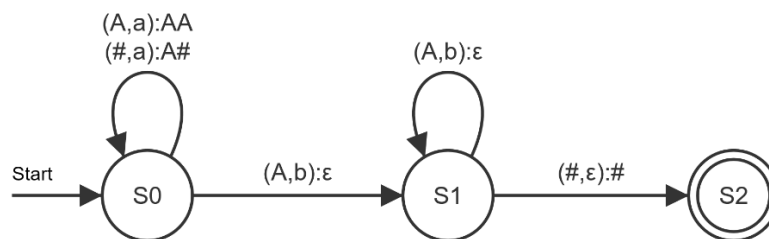
Bevor wir eine formale Definition eines Kellerautomaten geben, verdeutlichen wir uns zunächst das Prinzip an einem Beispiel. Dazu betrachten wir einen Kellerautomaten für die Sprache

$\{a^n b^n \mid n=1, 2, 3, \dots\}$:

Eingabealphabet: $\Sigma=\{a, b\}$

Kelleralphabet: $\Gamma=\{\#, A\}$ mit Keller-Vorbelegungszeichen #

Übergangsgraph:



Aufgaben

- 2) Wie man die Beschriftungen der Zustandsübergänge lesen muss, verdeutlichen wir uns, indem wir selbst einen solchen Graphen erstellen. Es gibt verschiedene digitale Werkzeuge, mit denen Automaten komfortabel dargestellt und getestet werden können.
 - a) Erstellen Sie mit dem Werkzeug *flaci.com*¹ (Link: <https://flaci.com/autoedit>) den abgebildeten **DETERMINISTISCHEN KELLERAUTOMATEN**.
 - b) Wählen Sie den Menüpunkt Simulation und stellen Sie die Geschwindigkeit auf „Langsam“. Simulieren Sie die Verarbeitung der Eingabe *aa* und beobachten Sie dabei die erfolgten Zustandsübergänge sowie die jeweils zugehörige Belegung des Kellers. Simulieren Sie außerdem jeweils die Verarbeitung der Eingabe *ab* sowie der Eingabe *aab*. Welche der Eingaben werden vom Kellerautomaten akzeptiert, welche nicht?
 - c) Beschreiben Sie mithilfe Ihrer Beobachtungen aus Aufgabenteil b) die Bedeutung der Schreibweise der Zustandsübergänge wie etwa $(\#,a):A\#$ oder $(A,a):AA$.

Darstellung der Verarbeitung einer Eingabe

Die Bearbeitung eines Eingabewortes durch einen Kellerautomaten lässt sich ähnlich wie bei einem DEA durch eine Folge von **Konfigurationen** darstellen, die der Automat nacheinander annimmt. Eine Konfiguration besteht hier immer aus dem aktuellen Zustand, der aktuellen Belegung des Kellerspeichers sowie der noch zu verarbeitenden Eingabe. Für das Beispiel *aabb* ergibt sich die Konfigurationsfolge:

aktueller Zustand	S0	S0	S0	S1	S1	S2
Belegung des Kellers		A	A	A		
	#	#	#	#	#	#
noch zu verarbeitende Eingabe	aabb	abb	bb	b		

¹ FLACI.com wird von der Pädagogischen Hochschule Schwyz kostenlos für Bildungszwecke zur Verfügung gestellt: <https://flaci.com> [Zugriff am: 06.06.2023]

Da sich der Automat nach vollständiger Verarbeitung der Eingabe in einem Endzustand befindet, wird die Eingabe aabb vom Automaten akzeptiert.

- 3) Untersuchen Sie unter Angabe der zugehörigen Konfigurationenfolgen, ob die Eingaben aaabbb, aba und bb vom Kellerautomaten akzeptiert werden. Simulieren Sie diese Eingaben anschließend mit flaci.com und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Kellerautomaten

Die Überlegungen zum Beispiel eines Kellerautomaten für die Sprache $\{a^n b^n \mid n=1, 2, 3, \dots\}$ wollen wir nun verallgemeinern²:

Ein **deterministischer Kellerautomat** wird definiert durch die Angabe eines **Eingabealphabets** Σ , die Angabe eines **Kelleralphabetes** Γ mit **Vorbelegungszeichen** # sowie der Darstellung eines **Zustandsübergangsgraphen**. Wie beim DEA besteht auch bei einem Kellerautomaten der Zustandsübergangsgraph aus einer endlichen Menge von Zuständen, die als Kreise dargestellt werden. Einer der Zustände ist durch einen Pfeil als **Startzustand** gekennzeichnet, außerdem gibt es einen oder mehrere **Endzustände**. Im Startzustand befindet sich lediglich das Keller-Startsymbol # im Keller. Am Zustandsübergang wird in Klammern zuerst das oberste Zeichen des Kellers gefolgt vom aktuellen Eingabezeichen notiert. Das vom Speicher gelesene Zeichen wird dabei aus dem Keller entfernt. Nach den Klammern wird ein Doppelpunkt angegeben. Hinter dem Doppelpunkt wird notiert, welche Zeichen im Kellerspeicher abgelegt werden. Dabei kann es sich um eines, keines (in diesem Fall schreibt man ϵ) oder sogar mehrere Zeichen handeln. Sind es mehrere Zeichen, so wird das am weitesten rechts notierte Zeichen zuerst auf den Keller gelegt. Außerdem sind sogenannte ϵ -Übergänge möglich. Diese hängen nur vom aktuellen Kellersymbol, nicht aber vom aktuellen Eingabezeichen ab (im Beispiel war der Übergang $(\#, \epsilon) : \#$ ein solcher ϵ -Übergang). Wenn ein ϵ -Übergang von einem Zustand ausgeht, so darf von diesem kein weiterer Übergang mit demselben obersten Kellersymbol ausgehen. Es wird festgelegt, dass eine Eingabe genau dann vom Automaten akzeptiert wird, wenn sich der Automat **nach vollständiger Verarbeitung** der Eingabe in einem Endzustand befindet.

Hinweis: Bei einem deterministischen Kellerautomaten gibt es für jedes Eingabezeichen w und jedes oberste Kellerzeichen k maximal einen Zustandsübergang. Anders als beim DEA muss der Übergangsgraph eines Kellerautomaten also nicht vollständig sein. So kann es passieren, dass der Automat wegen einer fehlenden Übergangsregel in einem Zustand verbleibt, **ohne** dass eine Eingabe vollständig verarbeitet wurde. In diesem Fall wird die Eingabe nicht akzeptiert (auch wenn der aktuelle Zustand zufällig ein Endzustand ist).

² Die Definition orientiert sich an „Ergänzende Hinweisen zum Kerncurriculum Informatik für die gymnasiale Oberstufe am Gymnasium, an der Gesamtschule sowie für das Kolleg“, gültig ab dem 01.07.2021, herausgegeben vom Niedersächsischen Kultusministerium
https://cuvo.nibis.de/index.php?p=detail_view&docid=1396&k0_0=Fach&v0_0=Informatik (Link vom 06.06.23)

Aufgaben:

- 4) Wir betrachten noch einmal den Kellerautomaten zur Sprache $\{a^n b^n \mid n=1, 2, 3, \dots\}$ mit Eingabealphabet: $\Sigma=\{a, b\}$, Kellularphabet: $\Gamma=\{\#, A\}$ mit Keller-Vorbelegungszeichen # und Übergangsgraph:

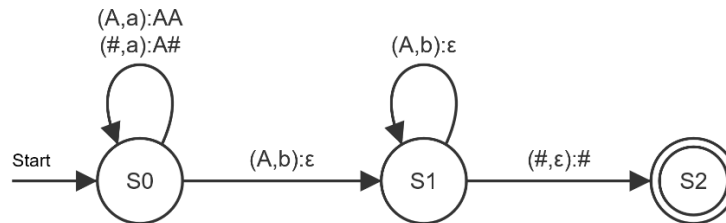


Abbildung 1: Kellerautomat zur Sprache $\{a^n b^n \mid n=1, 2, 3, \dots\}$

Erläutern Sie, wie der Vergleich der Anzahl des Zeichens a mit der Anzahl des Zeichens b mit diesem Kellerautomaten modelliert wird.

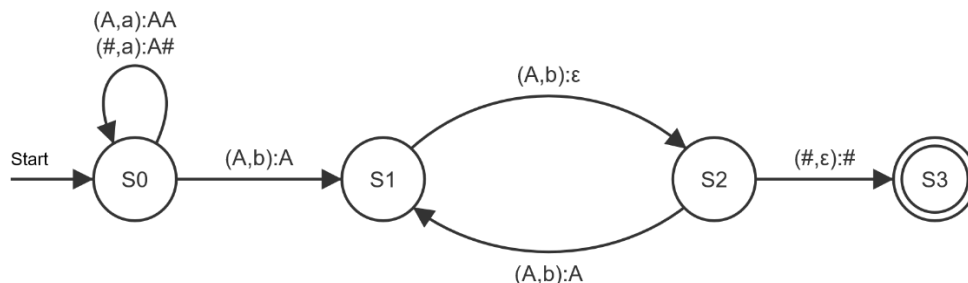
- 5) Ändern Sie den Kellerautomaten aus Abbildung 1 so, dass dieser die Sprache $\{a^n b^n \mid n=0, 1, 2, 3, \dots\}$ akzeptiert.

- 6) Gegeben ist der Kellerautomat definiert durch

Eingabealphabet: $\Sigma=\{a, b\}$

Kellularphabet: $\Gamma=\{\#, A\}$ mit Keller-Vorbelegungszeichen #

Übergangsgraph:



Beschreiben Sie die von diesem Kellerautomaten akzeptierte Sprache mit eigenen Worten.

- 7) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die die Sprache $\{a^n b c^n \mid n=1, 2, 3, \dots\}$ erzeugt. Entwickeln Sie außerdem einen deterministischen Kellerautomaten zur Modellierung der Sprache.

Die Rolle des Vorbelegungszeichens sowie möglicher ϵ -Übergänge

- 8) Bei der Definition eines Kellerautomaten muss immer ein Vorbelegungszeichen (man spricht auch vom Startsymbol) des Kellers angegeben werden. In unseren Beispielen ist das Zeichen #. Begründen Sie, warum man bei der Definition eines Kellerautomaten nicht auf die Angabe eines Vorbelegungszeichens verzichten kann.

- 9) Sogenannte ϵ -Übergänge hängen nur vom aktuellen Kellersymbol, nicht aber vom aktuellen Eingabezeichen ab. Erklären Sie, was passieren würde, wenn man auf die Festlegung verzichtet, dass wenn ein ϵ -Übergang von einem Zustand ausgeht, von diesem kein weiterer Übergang mit demselben obersten Kellersymbol ausgehen darf.

Weitere Beispiele für Kellerautomaten

10)

- Entwickeln Sie einen Kellerautomaten mit dem Eingabealphabet $\Sigma = \{ (,) \}$, welcher gültige Klammerausdrücke für Taschenrechnereingaben akzeptiert. Beispiele für korrekte Klammerausdrücke sind: $()()()$, $((()))()$ oder $((()))()$. Ungültige Ausdrücke sind dagegen zum Beispiel $)()$, $((()$ oder $()()()$.
- Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die die gleiche Sprache erzeugt.
- Begründen Sie, warum es keinen deterministischen endlichen Automaten zur Modellierung der Sprache gibt.

11) Beurteilen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussagen:

- Behauptung: *Lässt sich eine formale Sprache durch einen deterministischen endlichen Automaten modellieren, so existiert auch ein Kellerautomat, der diese Sprache akzeptiert.*
- Behauptung: *Lässt sich eine formale Sprache durch einen Kellerautomaten modellieren, so existiert auch ein deterministischer endlicher Automat, der diese Sprache akzeptiert.*

12) Unter <https://za-aufgaben.nibis.de/> (Link vom 06.06.2023) sind die schriftlichen Abituraufgaben des Haupttermins der vergangenen Jahre zu finden. Die Abiturvorschläge ab 2021 enthalten häufig auch Aufgaben zu Kellerautomaten.

Ausblick

Neben den hier vorgestellten deterministischen Kellerautomaten gibt es auch nichtdeterministische Kellerautomaten. Bei diesen kann es abhängig vom aktuellen Zustand und obersten Kellersymbol mehrere verschiedene Übergänge geben. Anders als beim Fall DEA/NEA unterscheidet sich jedoch die Sprachklasse der deterministischen Kellerautomaten von der der nichtdeterministischen Kellerautomaten.

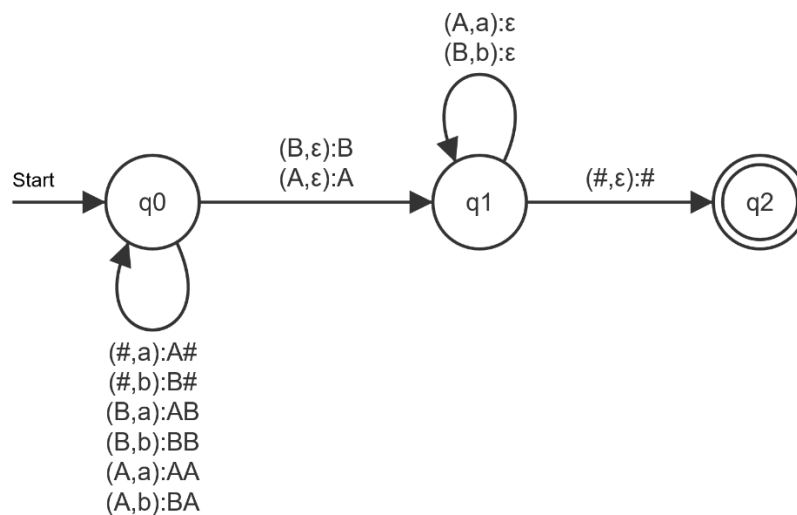
Aufgabe

13) Gegeben ist der folgende nichtdeterministische Kellerautomat (NKA) mit

Eingabealphabet: $\Sigma = \{a, b\}$

Kellularphabet: $\Gamma = \{\#, A\}$ mit Keller-Vorbelegungszeichen #

Übergangsgraph:



- Zeigen Sie, dass der NKA die Wörter *aabbbaa* und *ababaababa* akzeptiert.
- Zeigen Sie, dass der NKA die Wörter *ab* und *baba* nicht akzeptiert.
- Geben Sie die vom NKA akzeptierte Sprache an.
- Für die von diesem NKA akzeptierte Sprache gibt es keinen deterministischen endlichen Automaten, der die Sprache akzeptiert. Diskutieren Sie mit anderen über mögliche Gründe.
- Begründen Sie, warum es umgekehrt zu jedem deterministischen Kellerautomaten einen NKA gibt, der die gleiche Sprache akzeptiert.

Hinweis

Die Materialien erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit hinsichtlich der für die Abiturprüfung erwarteten Kompetenzen. Verbindlich für das Abitur in Niedersachsen sind allein das niedersächsische Kerncurriculum für die gymnasiale Oberstufe sowie die ergänzenden Hinweise in der jeweils aktuellen Fassung.

Lizenz

Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung - Nicht-kommerziell - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](#). Sie erlaubt Bearbeitungen und Weiterverteilung des Werks unter Nennung meines Namens und unter gleichen Bedingungen, jedoch keinerlei kommerzielle Nutzung.

Abbildungsnachweise: Die Abbildungen wurden mithilfe der Software FLACI.com erzeugt. FLACI.com wird von der Pädagogischen Hochschule Schwyz kostenlos für Bildungszwecke zur Verfügung gestellt: <https://flaci.com> (Zugriff vom 06.06.2023)